555. 函數方程式

$$f(x,y)+f(x+y,z)=f(x,y+z)+f(y,z)$$

ニ就イテ (IV)

角谷　靜夫 (阪大)

(C) ニヨッテ (33) ガ成立スルコトガワカッタガ更ニ精シク $g(P,Q)$ ノ性質ヲ調ベヨウ。

(d)　次ノ二ツノ場合ガアル。

(i)　$C(\pi)\neq 0$　ナルトキ。　π 上ニ一点 O ガ存在シテ

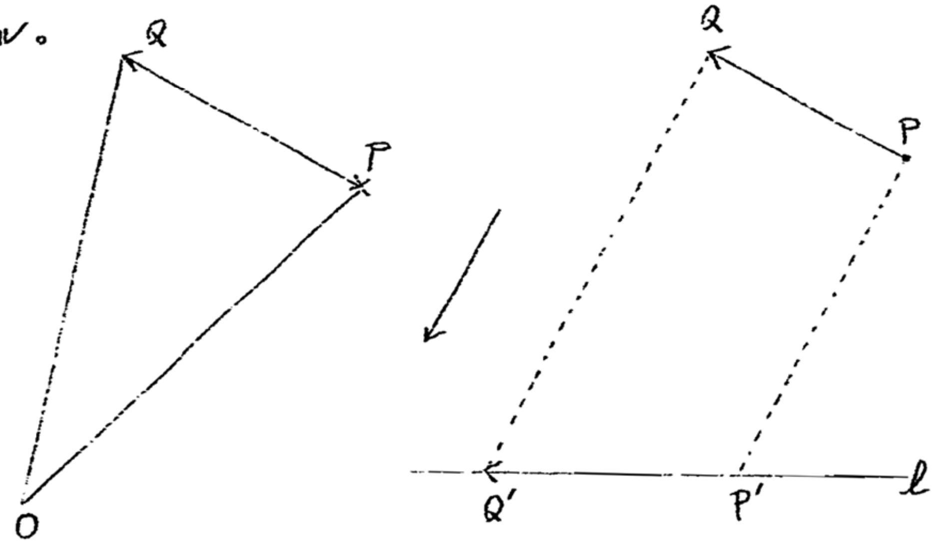
$$g(P,Q)=C(\pi)\cdot A(OPQ) \cdots\cdots (34)$$

トナル。ココニ $A(OPQ)$ ハ $\triangle OPQ$ ノ面積デアル。

(ii)　$C(\pi)=0$　ナルトキ。　π 上ニ一ツノ方向 d ガ存在シテ P, Q ヲ d ノ方向ニ、d ト平行デナイ直線 l 上ニ射影シタ点ヲ P', Q' トスレバ

$$g(P,Q)=g(P',Q')\equiv C(l)\cdot L(\overrightarrow{P'Q'}) \cdots\cdots (35)$$

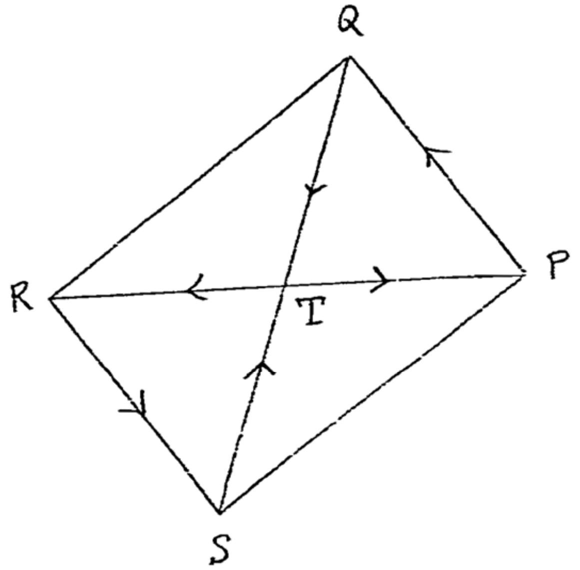
トナッテキル。但シ $L(\overrightarrow{P'Q'})$ ハ $P'Q'$ ノ長サ (方向モ考ヘニ入レタ) デアル。



(i) ノ場合　　　　(ii) ノ場合

(ii) ハ (i) ニ於テ O ガ ∞ ニナッタ時デアルト考ヘルコトガ出来ル。又 $g(P,Q)$ ガ恒等的ニ 0 トナルトキハ (34),(35) ノ何レガ成立スルト考ヘテモ差支ヘナイ。

証明: π 上ニ任意ノ矩形 $\square = PQRS$ ヲ考ヘル。



$$PQ = SR = a,$$

$$QR = PS = b$$

トシ PR ト QS トノ交点ヲ T トスレバ

$$\Omega(PQT)+\Omega(RST) = c(\pi)\cdot\frac{ab}{4} + c(\pi)\cdot\frac{ab}{4} = c(\pi)\cdot\frac{ab}{2}$$

デアル。然ルニ

$$\text{左辺} = g(P,Q)+g(Q,T)+g(T,P) +g(R,S)+g(S,T)+g(T,R)$$

デ且ツ (a) ヨリ

$$g(Q,T)+g(S,T)=0$$

$$g(T,P)+g(T,R)=0$$

デアルカラ

$$g(P,Q)-g(S,R)=c(\pi)\cdot\frac{a\cdot b}{2}$$

トナル。今 P, Q ヲ通ル直線ヲ l, S, R ヲ通ル直線ヲ l' トスレバコレヨリ

$$a\cdot c(l)-a\cdot c(l')=c(\pi)\cdot\frac{a\cdot b}{2}$$

即チ

$$c(l)-c(l')=\frac{c(\pi)}{2}\cdot b$$

ヲ得ル。ヨッテ次ノ結果ヲ得ル。

コレハ一ツノ直線 l_0 ニ平行ナ直線 l ニ関スル $c(l)$ ガ l ト l_0 トノ距離ニ比例シテ変化スルコトヲ意味スル。シカモソノ比例ノ常数ハ各方向ニ對シテ一定デ $\frac{c(\pi)}{2}$ ニヒトシイ。

次ニ $c(\pi)\neq 0$ ナルトキト $c(\pi)=0$ ナルトキトニワケテ考ヘル。

(I) $c(\pi)\neq 0$ ナルトキ。

任意ノ方向ノ直線 l_0 ニ對シテ、コレト平行デ且ツ $c(l)=0$ トナル如キ直線 l ガ存在スル。（コレヲ作ルタメニハ l_0 ト平行デ l_0 トノ距離ガ $-\frac{2c(l_0)}{c(\pi)}$ ナル直線ヲトレバヨイ。）

トコロガ各方向ニ対スルコノヤウナ直線ハ一定点 O ヲ通ラネバナラナイ。何トナレバ若シサウデナケレバ一点ヲ通ラナイ三ツノ直線 l_1, l_2, l_3 ニテ、何レノ二ツモ互ニ平行デナク且ツ $c(l_1)=c(l_2)=c(l_3)=0$ トナルモノガ存在スル。

l_1, l_2, l_3 ノ作ル三角形 PQR ヲ考ヘレバ $c(\pi)\neq 0$ ヨリ $\Omega(PQR)\neq 0$ トナラネバナラナイガ一方 $\Omega(PQR)=g(P,Q)+g(Q,R)+g(R,P)$ デ右辺ハ $c(l_1)=c(l_2)=c(l_3)=0$ ヨリ 0 トナラネバナラヌカラ矛盾デアル。

此ノ如クシテ一点 O ガ存在シテ O ヲ通ル任意ノ直線 l ニ對シテ $c(l)=0$ トナルコトガワカル。$g(Q,O)=g(O,P)=0$

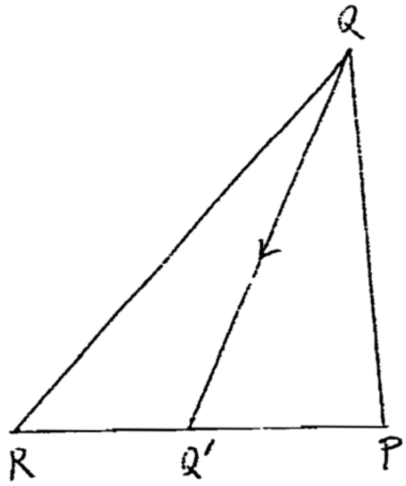
デアルカラ

$$g(P,Q)=g(O,P)+g(P,Q)+g(Q,O)$$
$$=\mathfrak{S}(OPQ)=c(\pi)\cdot A(OPQ)$$

トナル。即チ(34)ガ成立スル。

(II) $c(\pi)=0$ ナルトキ。

コノトキハ互ニ平行ナ二ツノ直線 l, l' ニ對シテ $c(l)=c(l')$ デアル。



今三角形 PQR ヲ考ヘレバ

$\mathfrak{S}(PQR)=0$ ヨリ

$$g(P,Q)+g(Q,R)=g(P,R)$$

ヲ得ル。PR 上ニ Q' ヲ

$$g(P,Q')=g(P,Q)$$

(従ッテ又 $g(Q',R)=g(Q,R)$)

ナル如クトレバ $\mathfrak{S}(PQQ')=0$ ナルコトカラ

$$g(Q,Q')=0$$

トナル。ヨッテ $\overrightarrow{QQ'}$ ニ平行ナ直線 l' ニ關シテ $c(l')=0$ デアル。故ニ QQ' ノ方向ヲ α トスレバ、コレガ(ii)ノ條件ヲ満足スルコトハ容易ニワカル。何トナレバ α ト平行デナイ直線 l ヲトリ、l 上ニ P, Q ヲ α ノ方向ニ project シタ点ヲ夫々 P', Q' トスレバ $c(\pi)=0$ ヨリ

$$0=\mathfrak{S}(PQQ'P')=g(P,Q)+g(Q,Q')+g(Q',P')+g(P',P)$$

然ルニ $\overrightarrow{QQ'}$, $\overrightarrow{PP'}$ ハ α ニ平行デアルカラ $g(Q,Q')=g(P'P)=0$ トナリ、シタガッテ

$$g(P,Q)=g(P',Q')=c(l)\cdot L(\overrightarrow{P'Q'}) \quad \text{-------------- (35)}$$

トナル。

(e) R_{n-1} 内ノ直線 l ヲ $c(l)=0$ ナルモノ全体ノ集合ヲ Γ トスル。(d) デ考ヘタコトヨリ R_{n-1} 内ノ二次元ノ平面 π 上デハ Γ ハ一点 $O(\pi)$ ヲ通ル直線全体カ又ハ平行線全体ニナッテキル。後ノ場合ニハ $O(\pi)$ ハ ∞ ニアルト考ヘルコトが出来ル。カヽル直線ノ集合ハ射影幾何學デ論ジラレテキル。